

**Paweł Kłosowski  
Andrzej Ambroziak**

**METODY  
NUMERYCZNE  
W MECHANICE  
KONSTRUKCJI**

**Z PRZYKŁADAMI W PROGRAMIE  
MATLAB**

---

**GDAŃSK 2011**

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

RECENZENT

*Magdalena Rucka*

PROJEKT OKŁADKI

*Katarzyna Olszonowicz*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem  
<http://www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG>

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2011

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

**ISBN 978-83-7348-363-7**

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

---

Wydanie I. Ark. wyd. 7,2, ark. druku 8,75, 963/629

---

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

# Spis treści

1. Wstęp .....	7
2. Układy równań liniowych .....	8
2.1. Wprowadzenie .....	8
2.2. Podział numerycznych metod rozwiązania i ich ogólne cechy .....	8
2.3. Metody eliminacyjne .....	9
2.3.1. Metoda eliminacji Gaussa .....	9
2.3.2. Metoda Jordana .....	10
2.4. Metody dekompozycyjne .....	11
2.4.1. Wprowadzenie .....	11
2.4.2. Metoda Gaussa-Doolittle'a .....	12
2.4.3. Metoda Gaussa-Crouta .....	13
2.4.4. Metoda Choleskiego (Banachiewicza) .....	13
2.5. Metody przybliżone .....	14
2.5.1. Metoda iteracyjna Gaussa .....	14
2.5.2. Metoda Gaussa-Seidla .....	15
2.5.3. Metoda nadrelaksacji .....	15
2.6. Przykłady .....	16
2.6.1. Metoda Gaussa .....	16
2.6.2. Metoda Jordana .....	19
2.6.3. Odwrócenie macierzy metodą Jordana .....	19
2.6.4. Metoda Gaussa-Doolittle'a .....	21
2.6.5. Metoda Gaussa-Crouta .....	23
2.6.6. Metoda Choleskiego .....	25
2.6.7. Metoda iteracyjna Gaussa .....	27
2.6.8. Metoda Gaussa-Seidla .....	29
2.6.9. Metoda nadrelaksacji .....	31
3. Problem własny .....	34
3.1. Podstawy teoretyczne .....	34
3.1.1. Wprowadzenie .....	34
3.1.2. Sprowadzenie ogólnej postaci problemu własnego do postaci standardowej ..	35
3.1.3. Rozwiązanie postaci standardowej .....	37
3.1.4. Rozwiązanie standardowego problemu własnego metodą Jacobiego ....	38
3.1.5. Metoda potęgowa .....	40
3.1.6. Inne metody numerycznego rozwiązania problemu własnego .....	41
3.2. Przykłady .....	41
3.2.1. Poszukiwanie punktów zerowych wielomianu .....	41
3.2.2. Wektory własne .....	42
3.2.3. Metoda Jacobiego .....	43
3.2.4. Metoda potęgowa .....	47

3.2.5. Najmniejsza wartość własna metodą potęgową .....	49
3.2.6. Rozwiązanie problemu własnego dla ramy .....	51
4. Równania nieliniowe .....	56
4.1. Podstawy teoretyczne .....	56
4.1.1. Informacje ogólne .....	56
4.1.2. Metoda przeszukiwania .....	56
4.1.3. Metoda połowienia kroku .....	57
4.1.4. Metoda lokalnego minimum .....	57
4.1.5. Metoda Monte Carlo .....	57
4.1.6. Metoda siecznych .....	57
4.1.7. Metoda siecznych z przyspieszeniem .....	58
4.1.8. Metoda stycznych (Newtona) .....	59
4.1.9. Zmodyfikowane metody typu Newtona dla pierwiastków wielokrotnych ...	59
4.2. Przykłady .....	61
4.2.1. Metoda przeszukiwania .....	61
4.2.2. Metoda połowienia kroku .....	63
4.2.3. Metoda minimum lokalnego .....	65
4.2.4. Metoda siecznych .....	68
4.2.5. Metoda siecznych z przyspieszeniem .....	71
4.2.6. Metoda stycznych .....	73
4.2.7. Metoda Monte Carlo .....	76
5. Interpolacja .....	78
5.1. Wprowadzenie .....	78
5.2. Interpolacja liniowa .....	79
5.3. Interpolacja kwadratowa .....	80
5.4. Interpolacja Newtona dla wielomianu dowolnego stopnia .....	80
5.5. Interpolacja wielomianami Czebyszewa .....	81
5.6. Interpolacja wielomianami Hermite'a .....	81
5.7. Interpolacja wielomianami Lagrange'a .....	82
5.8. Interpolacja szeregami Fouriera .....	82
5.9. Przykłady .....	82
5.9.1. Interpolacja liniowa .....	82
5.9.2. Interpolacja kwadratowa .....	84
5.9.3. Interpolacja sześcienna .....	85
6. Aproksymacja .....	87
6.1. Wprowadzenie .....	87
6.2. Aproksymacja interpolacyjna .....	87
6.3. Aproksymacja jednostajna .....	87
6.4. Metoda najmniejszych kwadratów – wariant liniowy .....	88
6.5. Ocena dokładności aproksymacji .....	89
6.6. Przykłady .....	91
6.6.1. Aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów .....	91

---

7. Całki oznaczone .....	97
7.1. Wprowadzenie .....	97
7.2. Standaryzacja przedziału całkowania .....	97
7.3. Metody obliczania całek .....	97
7.3.1. Metoda Newtona-Cotesa .....	97
7.3.2. Metoda Gaussa .....	99
7.3.3. Iteracyjny algorytm Romberga .....	101
7.3.4. Metoda Monte Carlo .....	101
7.4. Przykłady .....	101
7.4.1. Metoda Newtona-Cotesa bez standaryzacji przedziału całkowania .....	102
7.4.2. Metoda Newtona-Cotesa ze standaryzacją przedziału całkowania .....	103
7.4.3. Całkowanie metodą Gaussa ze standaryzacją przedziału całkowania .....	104
8. Równania różniczkowe I rzędu .....	108
8.1. Wprowadzenie .....	108
8.2. Podział metod rozwiązywania równań różniczkowych I rzędu .....	109
8.2.1. Metoda Eulera .....	109
8.2.2. Metoda punktu środkowego .....	110
8.2.3. Metoda Rungego-Kutty .....	110
8.2.4. Metoda trapezów .....	111
8.2.5. Metoda Adamsa-Bashfortha-Moultona .....	112
8.3. Przykład .....	112
8.3.1. Zastosowanie algorytmu Eulera .....	112
8.3.2. Rozwiązanie metodą punktu środkowego .....	114
8.3.3. Rozwiązanie metodą Heuna .....	114
8.3.4. Rozwiązanie klasyczną metodą Rungego-Kutty .....	115
8.3.5. Rozwiązanie metodą trapezów .....	116
8.3.6. Rozwiązanie metodą Adamsa-Bashfortha-Moultona .....	117
9. Równania różniczkowe II rzędu .....	119
9.1. Wprowadzenie .....	119
9.2. Podział metod rozwiązywania równań ruchu .....	119
9.2.1. Metoda superpozycji modalnej .....	120
9.2.2. Metoda różnic centralnych .....	122
9.2.3. Metoda Newmarka .....	124
9.3. Przykład .....	126
9.3.1. Rozwiązanie analityczne metodą superpozycji modalnej .....	126
9.3.2. Rozwiązanie metodą różnic centralnych .....	130
9.3.3. Rozwiązanie metodą Newmarka .....	134
Literatura .....	139