



POLITECHNIKA
GDAŃSKA



RAFAŁ HEIN

HYBRYDOWE MODELE I METODY MODELOWANIA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

GDAŃSK 2018

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Janusz T. Cieśliński

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Michał Szydłowski

REDAKTOR SERII

Krzysztof J. Kaliński

RECENZENCI

Andrzej Buchacz

Bartosz Powalka

REDAKCJA JĘZYKOWA

Agnieszka Frankiewicz

PROJEKT OKŁADKI

Jolanta Cieślawska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<http://www.pg.edu.pl/wydawnictwo/katalog>
zamówienia prosimy kierować na adres wydaw@pg.edu.pl

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2018

ISBN 978-83-7348-758-1

SPIS TREŚCI

WYKAZ OZNACZEŃ I SKRÓTÓW	5
1. WSTĘP	7
1.1. Wprowadzenie	7
1.2. Cele i zakres pracy	9
2. METODA TRANSMITANCJI UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH	12
2.1. Modelowanie układów jednowymiarowych	12
2.1.1. Przykład zastosowania metody w analizie statycznej	16
2.1.2. Przykład zastosowania metody w analizie dynamicznej	18
2.2. Modelowanie jednowymiarowych układów złożonych	21
2.2.1. Przykład zastosowania metody w analizie statycznej układów złożonych	24
2.2.2. Przykład zastosowania metody w analizie dynamicznej układów złożonych	30
2.3. Program komputerowy MECHANIK	36
2.3.1. Przykład zastosowania programu MECHANIK w analizie układów złożonych ...	38
2.3.2. Przykłady zastosowania programu MECHANIK w analizie układów kratowni- cowych	45
2.4. Podsumowanie	51
3. DYSKRETNO-CIĄGŁA METODA PRYZM	53
3.1. Modelowanie układów wielowymiarowych o parametrach skupionych i rozłożonych ...	53
3.2. Model ogólny układu dyskretno-ciągłego	54
3.2.1. Przykład zastosowania DCMP do analizy pojedynczej pryzmy	63
3.2.2. Przykład zastosowania DCMP do analizy wielu pryzm	65
3.2.3. Przykłady zastosowania DCMP do analizy płyt	67
3.3. Modelowanie wielowymiarowych układów złożonych	72
3.3.1. Przykład zastosowania DCMP do analizy pryzmy o zmiennym przekroju	78
3.3.2. Przykład zastosowania DCMP do analizy płyty stopniowanej	81
3.4. Podsumowanie	86
4. ZREDUKOWANE MODELE HYBRYDOWE	88
4.1. Modelowanie układów jednowymiarowych o parametrach rozłożonych	88
4.2. Modelowanie ruchomych strun i belek	88
4.2.1. Przykłady analizy ruchomej struny i belki	92
4.2.2. Przykład analizy ruchomej struny w kontakcie z podukładem o parametrach skupionych	95
4.3. Modelowanie wirników	103
4.3.1. Przykład zastosowania MHMM w analizie belki z tarczą	107
4.3.2. Przykład zastosowania MHMM w analizie wirnika z tarczą	114
4.3.3. Przykład zastosowania MHMM w analizie wirnika swobodnego z tarczą	116
4.4. Modelowanie układów wielowymiarowych o parametrach skupionych	123
4.4.1. Zastosowanie MHMM do analizy układu wielowirnikowego	125
4.4.2. Przykład analizy układu wielowirnikowego z przekładnią	134
4.4.3. Przykład analizy układu wielowirnikowego z nieliniowym modelem przekładni	144
4.5. Modelowanie dyskretno-ciągłych układów wielowymiarowych	149
4.5.1. Opis matematyczny hybrydowego modelu zredukowanego układu wielowymia- rowego	152
4.5.2. Przykład zastosowania MHMM w analizie dynamicznej pryzmy	154
4.5.3. Przykład zastosowania MHMM w analizie dynamicznej płyty	157
4.6. Podsumowanie	163

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI	165
5.1. Podsumowanie	165
5.2. Wnioski	167
6. ZAŁĄCZNIK	169
6.1. Opis matematyczny układu złożonego	169
6.2. Warunki ortogonalności układu złożonego	171
6.3. Model modalny układu złożonego	174
BIBLIOGRAFIA	178
Streszczenie w języku polskim	183
Streszczenie w języku angielskim	183

WYKAZ OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

a	– współczynnik równania różniczkowego
A	– powierzchnia przekroju
A	– macierz stanu układu o parametrach skupionych; macierz współczynników równania różniczkowego cząstkowego
B	– macierz wejść; macierz tłumienia
C	– macierz wyjść
D	– macierz przejść
E	– moduł Younga
f	– wymuszenie zewnętrzne
f	– wektor wymuszeń zewnętrznych
F	– macierz stanu
G	– funkcja Greena opisująca wpływ wymuszeń zewnętrznych; moduł Kirchhoffa
G	– macierz funkcji Greena; macierz żyroskopowa
H	– funkcja lub transmitancja układu o parametrach rozłożonych, opisująca wpływ warunków brzegowych
H	– macierz funkcji lub transmitancji układu o parametrach rozłożonych, opisująca wpływ warunków brzegowych
I	– geometryczny moment bezwładności przekroju
J	– masowy moment bezwładności
K	– macierz sztywności; macierz charakterystyczna
m	– masa; masa modalna
M	– moment gnący
M	– macierz bezwładności; macierz mas modalnych
M	– macierz operatorów warunków brzegowych na początku elementu
M_j	– operatory warunków brzegowych na początku elementu
N	– macierz operatorów warunków brzegowych na końcu elementu
N_j	– operatory warunków brzegowych na końcu elementu
p	– wektor wymuszeń w węzłach
q	– obciążenie rozłożone na jednostkę długości; współrzędna uogólniona
q	– wektor współrzędnych uogólnionych
Q	– funkcje własne
Q	– macierz wektorów własnych
s	– argument przekształcenia Laplace'a
T	– siła tnąca
T	– macierz wektorów własnych
U	– prędkość unoszenia
w	– przemieszczenie
x	– zmienna przestrzenna
y	– odpowiedź, sygnał wyjściowy, współrzędna modalna
y	– wektor odpowiedzi, sygnałów wyjściowych, współrzędnych modalnych
Y	– funkcja własna
z	– sygnał wejściowy
z	– wektor sygnałów wejściowych
Z	– wektor zależny od warunków początkowych
α	– operator przekształcenia Laplace'a
γ	– warunek brzegowy
γ	– macierz warunków brzegowych
η	– wektor zmiennych stanu; wektor współrzędnych modalnych

κ	– sztywność modalna; współczynnik ścinania
$\mathbf{\kappa}$	– macierz sztywności modalnych
μ	– masa modalna
$\boldsymbol{\mu}$	– macierz mas modalnych
ξ	– zmienna przestrzenna
ρ	– gęstość
τ	– moment
ω	– pulsacja, częstość kołowa drgań własnych
$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$	– dystrybucja delta Diraca
$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	– funkcja skokowa Heaviside'a

Indeksy górne

$()^T$	– transpozycja macierzy
$()'$	– pochodna względem zmiennej przestrzennej
$()\dot{}$	– pochodna względem czasu
$()\bar{}$	– transformata Laplace'a

Skróty

DCMP	– dyskretno-ciągła metoda pryzm
MHMM	– metoda hybrydowego modelowania modalnego
SES	– sztywny element skończony
WST	– warstwa sprężysto-tłumiąca
<i>diag</i>	– macierz diagonalna
<i>col</i>	– macierz kolumnowa

Rozdział 1

WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Nowoczesne systemy i urządzenia techniczne składają się często z wielu podukładów o zróżnicowanej naturze fizycznej. Są to m.in. podukłady mechaniczne, hydrauliczne, pneumatyczne, elektryczne czy też elektroniczne. Razem tworzą one synergiczny system techniczny. Ze względu na złożony charakter takiego systemu poszczególne jego podukłady opisuje się zazwyczaj odmiennymi metodami, odpowiadającymi naturze fizycznej modelowanych podukładów. Nie można bowiem wskazać jednej, uniwersalnej metody, którą można by zastosować do opisu wszystkich podukładów i całego systemu. Opracowuje się więc modele częściowe podukładów, a następnie wiąże się je ze sobą, otrzymując hybrydowy model holistyczny systemu. Model taki powinien być z jednej strony możliwie dokładny, by jak najlepiej opisywać zjawiska zachodzące w układzie rzeczywistym, a z drugiej względnie prosty. Znalezienie kompromisu między tymi wymaganiami nie jest jednak łatwe i często skłania do poszukiwania nowych metod modelowania. Z tych między innymi względów metody modelowania układów technicznych znajdują się w grupie zagadnień ciągle aktualnych i nieustannie rozwijanych. Stanowią przedmiot intensywnych prac w ośrodkach naukowych na całym świecie. Ich wynikiem są liczne, opracowane i zweryfikowane, praktyczne metody modelowania. Do powszechnie stosowanych należą metody elementów skończonych. Mimo że do opisu i badania większości układów technicznych w zupełności wystarcza metoda odkształcalnych elementów skończonych, nazywana w skrócie metodą elementów skończonych (MES), to swoje zastosowania znalazła również metoda sztywnych elementów skończonych (SES), opracowana na Politechnice Gdańskiej przez J. Kruszewskiego i E. Wittbrodta oraz współpracowników [43–46]. Odróżnia się od MES tym, że model dyskretny składa się ze sztywnych (nieodkształcalnych) brył, czyli sztywnych elementów skończonych (SES), połączonych ze sobą i opartych na nieważkich elementach sprężysto-tłumiących (EST). Jest to metoda alternatywna, którą można traktować jako uzupełnienie MES, a sztywne elementy skończone i elementy sprężysto-tłumiące – jako jedne z wielu typów elementów stosowanych w MES. Takie ujęcie obu metod, nazywane hybrydową metodą sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych, zaprezentowano m.in. w pracach [16, 43, 44, 94]. Choć metoda odkształcalnych elementów skończonych jest dokładniejsza i zdecydowanie częściej stosowana w praktyce inżynierskiej, to również metoda sztywnych elementów skończonych jest narzędziem chętnie wykorzystywanym do dyskretyzacji i modelowania układów mechanicznych. W wielu przypadkach okazuje się skuteczna, efektywna i niekiedy bardziej użyteczna od metody odkształcalnych elementów skończonych, np. podczas modelowania układów, których geometria nie jest dokładnie znana. Jej liczne modyfikacje [2–5, 86–88, 95, 98, 99, 100] świadczą, że jest nadal rozwijany i często używanym narzędziem do obliczeń inżynierskich. Znajduje zastosowanie m.in. w analizie dynamiki i drgań: obrabiarek [7, 37–40, 56, 57], mechanizmów, manipulatorów i robotów [2, 3, 99, 100], konstrukcji okrętowych [41, 42, 97], rurociągów [86–88], lin oraz słupów [4].

Obie metody dyskretyzacji prowadzą do uzyskania przybliżonego modelu matematycznego, opisywanego układem równań różniczkowych zwyczajnych. Jego dokładność zależy od gęstości podziału kontinuum materialnego na elementy skończone. Na ogół im większa ich liczba, tym dokładniejszy model. Istnieją jednak optymalna gęstość podziału i optymalna liczba elementów skończonych, powyżej której błędy zaokrągleń i obliczeń numerycznych zaczynają odgrywać decydującą rolę. Może to mieć miejsce na przykład przy dyskretyzacji elementów smukłych, jak struny, pręty czy belki. W takich przypadkach, dla zachowania odpowiedniego kształtu zastosowanych elementów skończonych i dokładności obliczeń, wymagana jest gęsta siatka podziału. Duża gęstość podziału prowadzi jednak do znaczącego wzrostu rzędu modelu matematycznego, rozumianego jako stopień równania różniczkowego opisującego ten model. Wysoki rząd modelu jest w wielu przypadkach niepożądany, np. przy projektowaniu układów sterowania [22, 23, 31, 96], i prowadzi jednocześnie do wydłużenia czasu obliczeń numerycznych. Z tego względu elementy smukłe lepiej jest traktować jak układy ciągłe i modelować za pomocą metod stosowanych do opisu układów o parametrach rozłożonych. Jest to uzasadnione, gdyż dla wielu praktycznych przypadków tego typu modeli istnieją dokładne rozwiązania analityczne. W przypadku bardziej złożonych jednowymiarowych układów ciągłych w celu wyznaczenia dokładnych rozwiązań można się posłużyć metodą transmitancji układów o parametrach rozłożonych [11, 89, 90, 103, 108, 111]. Liczne publikacje, w których metoda ta jest wykorzystywana, świadczą o jej dużym znaczeniu zarówno teoretycznym, jak i praktycznym [81, 84, 91, 92, 102]. Jednym z obszarów zastosowań metody jest modelowanie dla celów analizy i projektowania układów sterowania [35, 58, 105, 106, 110]. Metoda ta umożliwia m.in. wyznaczanie dokładnych wartości i funkcji własnych oraz mas i sztywności modalnych, na podstawie których można łatwo budować modele modalne niskiego rzędu. Modele takie są szczególnie wygodne i wręcz pożądane w teorii sterowania. Mają one również tę zaletę, że ich częstości własne są dokładne. Sposób budowania takich modeli zarówno dla układów o parametrach rozłożonych, jak i skupionych przedstawiono m.in. w pracach [26–30, 33, 34, 59–66, 68–72, 74].

Dla układów, które należy modelować jako wielowymiarowe, na ogół nie można określić dokładnych rozwiązań analitycznych. Istnieją one w ograniczonym zakresie i zazwyczaj tylko dla najprostszych przypadków szczególnych. Fakt ten stał się pretekstem do poszukiwania metod alternatywnych, które łączyłyby zalety metod modelowania układów o parametrach rozłożonych z metodami dyskretyzacji przestrzennych. W ten sposób opracowano dyskretno-ciągłą metodę pryzm (DCMP) oraz metody hybrydowego modelowania modalnego (MHMM).

Do wyprowadzenia równań ogólnych DCMP posłużono się metodą sztywnych elementów skończonych. Za jej pomocą opracowano najpierw ogólny model dyskretny, który następnie sprowadzono do modelu dyskretno-ciągłego. W tym sensie DCMP można traktować jako jedną z wielu modyfikacji metody SES. Z kolei w MHMM metodę sztywnych elementów skończonych wykorzystano do opracowania modelu powiązań między modalnymi modelami pryzm. Idea ta była wynikiem poszukiwania metod, które umożliwiałyby w pełni kontrolowane, świadome i bezpośrednie budowanie modeli niskiego rzędu w taki sposób, aby miały one określone własności dynamiczne i były możliwie najdokładniejszymi modelami o założonym rzędzie.

1.2. Cele i zakres pracy

Wraz z intensywnym rozwojem metod modelowania układów dynamicznych pojawiły się zaawansowane programy komputerowe, takie jak: ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, COSMOS/M, LS-DYNA i wiele innych. Programy te umożliwiają modelowanie złożonych układów i systemów dynamicznych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Opracowanie względnie dokładnych modeli dyskretnych za pomocą tych programów, szczególnie w paśmie wysokich częstotliwości, wymaga jednak gęstej siatki podziału kontinuum materialnego na elementy skończone. Wiąże się to z dużą liczbą stopni swobody modelu i w konsekwencji prowadzi do uzyskania modelu matematycznego wysokiego rzędu, opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych. W wielu przypadkach, na przykład podczas projektowania i analizy układów sterowania czy też szeroko rozumianych układów mechatronicznych, wysoki rząd modelu jest niepożądany i sprawia, że model jest niepraktyczny i wręcz bezużyteczny. Wyznaczenie prawa sterowania na podstawie takiego modelu jest w istocie niewykonalne. Zwłaszcza przy projektowaniu układów sterowania optymalnego [22, 23, 31, 96] wysoki rząd modelu wymaga rozwiązania dużej liczby nieliniowych równań różniczkowych lub algebraicznych Riccatiego, co jest często niemożliwe. Ponadto stosowanie modelu wysokiego rzędu zwiększa wymagania sprzętowe i znacząco wydłuża czas obliczeń numerycznych. Jeżeli czas ten przekracza czas trwania procesu rzeczywistego, to model taki nie nadaje się do zastosowania w sterowaniu w czasie rzeczywistym. Nie można go wykorzystać na przykład do odtwarzania zmiennych stanu i generowania sygnału sterującego. Potrzeba odtwarzania zmiennych stanu jest jednak nieunikniona, szczególnie w przypadkach, kiedy konstrukcja obiektu ogranicza lub wręcz uniemożliwia swobodny dostęp do wymaganych punktów pomiarowych. Z tych względów prostsze, ale adekwatne modele, które odzwierciedlają zachowanie złożonych układów z określoną lub zbliżoną do modelu wysokiego rzędu dokładnością, są bardziej użyteczne i pożądane w praktyce. Do budowania takich modeli można wykorzystać znane i nieustannie rozwijane metody redukcji rzędu modeli matematycznych [13–15, 80, 83]. Należą do nich m.in. metoda zrównoważonej realizacji modelu zredukowanego (*balanced truncation approximation*), w której na podstawie obliczonych wartości szczególnych i analizy gramianowej wyodrębnia się z modelu część dominującą i pomija nieistotną, a także metoda rozkładu ortogonalnego (*orthogonal decomposition method*), polegająca na zbudowaniu zredukowanego modelu modalnego na podstawie wydzielonych wartości i odpowiadających im wektorów własnych. Metody te mają jednak pewne wady. Aby za ich pomocą otrzymać odpowiednio dokładny model zredukowany, należy wcześniej opracować odpowiednio dokładny model wysokiego rzędu. Ponadto metodę rozkładu ortogonalnego stosuje się bez trudności jedynie do układów liniowych z tłumieniem proporcjonalnym. Dla układów z tłumieniem nieproporcjonalnym oraz z efektami żyroskopowymi i Coriolisa trudno jest formułować warunki ortogonalności, a często jest to wręcz niemożliwe. Chociaż ograniczenia te nie dotyczą metody zrównoważonej realizacji modelu zredukowanego, to jednak stopień redukcji w tej metodzie zależy od liczby wejść i wyjść układu zredukowanego. Im większa ich liczba, tym wyższy rząd modelu zredukowanego i niższy stopień redukcji. Obu tych metod nie można jednak zastosować do układów nieliniowych. Opisanie ograniczenia przyczyniły się do poszukiwania nowych metod modelowania. W związku z tym za cel niniejszej pracy przyjęto opracowanie metod alternatywnych na bazie dwóch koncepcji. Pierwsza z nich zakłada możliwość bezpośredniego budowania odpowiednio dokładnych modeli niskiego rzędu, druga zaś – konstruowania modeli hybrydowych na podstawie zredukowanych modeli modalnych.

Na podstawie pierwszej koncepcji opracowano dyskretno-ciągłą metodę pryzm (DCMP). Idea metody stanowiła wynik licznych prac autora dotyczących modelowania jednowymiarowych układów ciągłych z wykorzystaniem metody transmitancji układów o parametrach rozłożonych [32, 67, 69–71, 72]. W pierwotnej wersji metoda transmitancji układów o parametrach rozłożonych (*distributed transfer function method*, DTFM) przeznaczona była do modelowania układów jednowymiarowych z elementami skupionymi [11, 89, 90, 103, 104, 108, 111]. Znalazła również zastosowanie do opisu układów dynamicznych w ujęciu grafów wiązań [32, 59, 67, 73]. W pracach [107, 109] podjęto próbę jej rozszerzenia na układy dwuwymiarowe, a w opracowaniu [78] – na układy trójwymiarowe. W każdym z tych przypadków równania ogólne wyprowadzono na podstawie zasady Hamiltona przy użyciu metody odkształcalnych elementów skończonych. W niniejszej pracy podjęto próbę rozszerzenia DTFM na układy wielowymiarowe, jednak na bazie metody sztywnych elementów skończonych. Takie ujęcie okazało się efektywne i znacznie uprościło formuły obliczeniowe. Wynikiem prac jest oryginalna dyskretno-ciągła metoda pryzm (DCMP).

Druga koncepcja doprowadziła do opracowania metod hybrydowego modelowania modalnego (MHMM) jednowymiarowych układów ciągłych o parametrach rozłożonych, wielowymiarowych układów dyskretnych o parametrach skupionych oraz wielowymiarowych układów dyskretno-ciągłych, opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, otrzymywanymi w wyniku zastosowania dyskretno-ciągłej metody pryzm.

Opracowanie modelu niskiego rzędu metodą hybrydowego modelowania modalnego (MHMM) polega na wydzieleniu z modelu matematycznego tej jego części, dla której łatwo jest sformułować warunki ortogonalności, a tym samym zbudować model modalny, oraz pozostałej części, która to utrudnia lub uniemożliwia. Utworzony model modalny wiąże się następnie z dyskretnym modelem pozostałej części układu. W ten sposób otrzymuje się model hybrydowy. Należy zwrócić uwagę, że MHMM można zastosować do budowania modeli niskiego rzędu układów o parametrach zarówno skupionych, jak i rozłożonych, podczas gdy opisane wyżej metody redukcji – tylko do układów o parametrach skupionych, opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

W monografii zamieszczono wiele przykładów, które mają charakter ilustrujący opracowane metody. Ich celem nie jest rozwiązanie określonego problemu lub problemów technicznych, lecz zaprezentowanie metody czy też metod modelowania układów dynamicznych. Opracowane i przedstawione w pracy metody łączą zalety metody transmitancji układów o parametrach rozłożonych i metody sztywnych elementów skończonych. Metodę DTFM wykorzystuje się do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, otrzymywanych w wyniku zastosowania DCMP, a także do budowania zredukowanych modeli modalnych układów jednowymiarowych i wielowymiarowych. Metoda SES z kolei posłużyła do opracowania modelu powiązań pomiędzy pryzmami i zredukowanymi modelami modalnymi.

Ze względu na fakt, że opracowane metody bazują na metodzie transmitancji układów o parametrach rozłożonych, w monografii zawarto również jej opis. W związku z tym zakres pracy obejmuje:

- przedstawienie zastosowania metody transmitancji układów o parametrach rozłożonych w analizie statycznej i dynamicznej jednowymiarowych układów ciągłych;
- zaprezentowanie programu komputerowego MECHANIK do analizy jednowymiarowych układów ciągłych metodą transmitancji układów o parametrach rozłożonych;
- opracowanie dyskretno-ciągłej metody pryzm do modelowania jedno- i wielowymiarowych układów dynamicznych;

- opracowanie metod hybrydowego modelowania modalnego układów jednowymiarowych o parametrach rozłożonych, opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi;
- opracowanie metod hybrydowego modelowania modalnego układów wielowymiarowych o parametrach skupionych, opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi;
- opracowanie metod hybrydowego modelowania modalnego układów dyskretno-ciągłych, opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, otrzymywanymi w wyniku dyskretyzacji DCMP;
- wykonanie przykładów obliczeniowych ilustrujących opracowane sposoby i metody modelowania układów mechanicznych;
- wykonanie licznych obliczeń numeryczno-symbolicznych za pomocą opracowanych programów komputerowych, a następnie ich weryfikację poprzez porównanie wyników z wynikami uzyskanymi z zastosowaniem m.in. pakietu ANSYS.

Efektami pracy są:

- oryginalna, hybrydowa metoda transmitancji układów o parametrach rozłożonych i sztywnych elementów skończonych, nazywana dyskretno-ciągłą metodą pryzm;
- sposób hybrydowego modelowania modalnego układów jednowymiarowych o parametrach rozłożonych;
- metoda hybrydowego modelowania modalnego układów wielowymiarowych o parametrach skupionych, opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi;
- metoda hybrydowego modelowania modalnego wielowymiarowych układów dyskretno-ciągłych, opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, otrzymywanymi w wyniku zastosowania dyskretno-ciągłej metody pryzm.