

Marcin Kujawa

**Optymalizacja matematyczna
przy zastosowaniu programu**

Wolfram Mathematica

Gdańsk 2021

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dariusz Mikielewicz

RECENZENT

Czesław Szymczak

REDAKCJA JEZYKOWA

Agnieszka Frankiewicz

PROJEKT OKŁADKI

Wioleta Lipska-Kamińska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy.

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2021

ISBN 978-83-7348-818-2

Spis treści

Wstęp	5
1. Optymalizacja z programem MATHEMATICA	9
1.1. Krótko o optymalizacji	9
1.2. Programowanie matematyczne a MATHEMATICA	11
1.3. Podstawowe operatory logiczne i łączniki	12
2. Metody wariacyjne	15
2.1. Funkcja VariationalD	15
2.2. Funkcja EulerEquation	16
2.3. Funkcja FirstIntegrals	17
2.4. Funkcja VariationalBound	18
2.5. Funkcja NVariationalBound	19
3. Optymalizacja w ujęciu numerycznym	21
3.1. Funkcje NMinimize i NMaximize	21
3.2. Funkcje FindMinimum i FindMaximum	25
4. Optymalizacja w ujęciu symbolicznym	33
4.1. Funkcje Minimize i Maximize	33
5. Optymalizacja w programowaniu wypukłym	37
5.1. Funkcja LinearOptimization	38

5.2. Funkcja LinearFractionalOptimization	40
5.3. Funkcja QuadraticOptimization	41
5.4. Funkcja SecondOrderConeOptimization	42
5.5. Funkcja SemidefiniteOptimization	43
5.6. Funkcja ConicOptimization	44
6. <i>Optymalizacja w ujęciu macierzowym</i>	45
6.1. Funkcja LinearProgramming	45
6.2. Funkcja DualLinearProgramming	48
7. <i>Optymalizacja w ramach teorii grafów</i>	51
7.1. Funkcja FindShortestTour	51
7.2. Funkcja KnapsackSolve	52
7.3. Funkcja FindShortestPath	54
7.4. Funkcja FindPostmanTour	56
8. <i>Metody graficzne i wizualizacja rozwiązań</i>	61
8.1. Funkcje RegionPlot i ContourPlot	61
8.2. Funkcje Plot3D i RegionFunction	63
<i>Bibliografia</i>	67
<i>Indeks</i>	71

Wstęp

Wraz z rozwojem nauki i techniki obliczenia, w tym obliczenia inżynierskie, stają się coraz bardziej złożone i niezwykle czasochłonne. Ze względu na ten fakt równoległe doskonalone są metody obliczeniowe, a przy pracochłonnych analizach numeryczno-symbolicznych korzysta się z komputerów i odpowiedniego oprogramowania.

Dodatkowo, niezwykle często w swojej pracy czy podczas studiów stajemy przed problemem braku praktycznej znajomości właściwego „aparatu matematycznego”. Zastosowanie posiadanej wiedzy matematycznej wraz z wykorzystaniem komputerów wymaga nie tylko pewnej „biegłości matematycznej”, ale także sporej wiedzy programistycznej – zarówno w trakcie samego rozwiązywania problemu, jak i po jego rozwiązaniu, tzn. podczas analizy i prezentacji wyników.

W tym miejscu wypada też zwrócić uwagę, że podejście do zagadnień analizy matematycznej, w szczególności do zagadnienia optymalizacji matematycznej, której poświęcone jest niniejsze opracowanie, różni się zależnie od dziedziny działalności, wiedzy i zakresu potrzeb, zgodnie z anegdotą, w której inżynier, fizyk i matematyk otrzymali po kawałku siatki ogrodzeniowej i zadanie, by ogrodzić nią jak największy teren. Inżynier ogrodził teren o polu kwadratu. Fizyk wyznaczył najlepszy stosunek powierzchni do obwodu i rozstawił siatkę po okręgu. Natomiast matematyk rozstawił siatkę, tworząc dowolną krzywą zamkniętą, wszedł do środka i stwierdził, że znajduje się zewnątrz.

Pomimo czasem tak skrajnych podejść i potrzeb w ramach zadań optymalizacji matematycznej autor ma jednak nadzieję, że zawarte w skrypcie informacje i przykłady zainteresują Czytel-

ników i przyczynią się choć trochę do poszerzenia ich wiedzy dotyczącej programowania matematycznego.

Celem opracowania jest zaznajomienie Czytelnika z obsługą i podstawowymi funkcjami programu MATHEMATICA w zakresie programowania matematycznego (optymalizacji). Program MATHEMATICA może bowiem posłużyć jako użyteczne narzędzie w rozwiązywaniu problemów optymalizacji, umożliwiając „w miarę bezbolesne” uzyskanie rozwiązań dość złożonych problemów optymalizacji, przy nawet powierzchownej znajomości zagadnień i metod programowania matematycznego.

Podstawy obsługi programu MATHEMATICA zostały świadomie pominięte.

System MATHEMATICA stworzony przez firmę Wolfram Research, Inc. (www.wolfram.com) jest wszechstronnym środowiskiem do realizacji szeroko pojętych obliczeń matematycznych, fizycznych, technicznych, nie tylko numerycznych, jak to ma miejsce w przypadku innego powszechnie wykorzystywanego pakietu, jakim jest MATLAB, ale także – przede wszystkim – symbolicznych i ścisłych.

Język programowania zastosowany w pakiecie charakteryzuje się niezwykłą czytelnością i intuicyjnością. Język ten jest bowiem swego rodzaju językiem programowania wysokiego poziomu¹.

MATHEMATICA to niestety komercyjny system obliczeniowy. Istnieje wersja studencka programu, jednak również odpłatna. Program jest dostępny „bezpłatnie” jedynie do celów naukowych czy dydaktycznych, np. za pośrednictwem Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej w ramach grantów obliczeniowych (www.task.gda.pl). Wersja testowa programu jest dostępna na stronie producenta (www.mathematica.pl).

Niniejsza publikacja stanowi efekt działalności dydaktycznej i naukowej autora. Opracowanie powstało między innymi na podstawie dostępnych materiałów dystrybuowanych przez firmę Wolfram Research, Inc. (www.wolfram.com) i nie wyczerpuje w pełni omawianych zagadnień. Tekst będzie z czasem uzupełniany, poprawiany i rozszerzany, dlatego też Czytelnik proszony jest o nadsyłanie wszelkich uwag dotyczących jego treści (marcin.kujawa@pg.edu.pl).

¹ Język programowania wysokiego poziomu to język, którego składnia i słowa kluczowe mają maksymalnie ułatwić rozumienie kodu programu przez człowieka.

Rozdział 1 zawiera podstawowe informacje dotyczące programowania matematycznego oraz samego programu MATHEMATICA. W rozdziale tym przedstawiono jedynie niezbędne wiadomości i definicje dla zachowania jasności opracowania, świadomie rezygnując ze szczegółowych opisów poszczególnych metod i algorytmów.

W rozdziale 2 Czytelnik znajdzie opis podstawowych funkcji programu, które mogą zostać wykorzystane w przypadku optymalizacji problemów w ujęciu ciągłym, z zastosowaniem rachunku wariacyjnego.

W rozdziale 3 omówiono problem optymalizacji w ujęciu numerycznym, zarówno globalnym, jak i lokalnym. W ramach optymalizacji numerycznej w ujęciu globalnym opisano krótko: metodę Neldera–Meada, metodę ewolucji różnicowej, metodę symulowanego wyżarzania czy metodę poszukiwań losowych. W przypadku problemów optymalizacji numerycznej w ujęciu lokalnym omówiono kolejno: metody punktu wewnętrznego, metodę Newtona, metody quasi-Newtona, metody gradientów sprzężonych, metodę osi głównych, metodę Gaussa–Newtona oraz metodę Levenberga–Marquardta.

Rozdział 4 poświęcony został najważniejszym funkcjom programu i optymalizacji w ujęciu symbolicznym. Funkcje te, w pewnym zakresie uniwersalne, mogą bowiem posłużyć przy poszukiwaniu rozwiązań w ramach ścisłego optimum globalnego z wykorzystaniem: algorytmu cylindrycznej dekompozycji algebraicznej, metod analitycznych, w tym metody mnożników Lagrange’a czy algorytmu całkowitoliczbowego programowania liniowego.

W rozdziale 5 skupiono uwagę na opisie funkcji i algorytmów mających zastosowanie przy optymalizacji problemów wypukłych: metody sympleks i zmodyfikowanej metody sympleks, metod punktu wewnętrznego, metod programowania kwadratowego czy metod numerycznych: CLP (*COIN-OR Linear Programming*), SCS (*Splitting Conic Solver*), CSDP (*COIN-OR Semidefinite Programming*) i DSDP (*Dual-Scaling Algorithm for Semidefinite Programming*). W rozdziale 6 omówiono krótko funkcje oraz algorytmy wykorzystywane w optymalizacji w zapisie macierzowym.

W rozdziale 7 opisano funkcje programu stosowane w optymalizacji w ramach teorii grafów w odniesieniu zarówno do algorytmów

kombinatorycznych, jak i iteracyjnych, w tym metodę Dijkstry czy metodę Bellmana–Ford–Moore’a i ich modyfikacje.

W rozdziale 8 przedstawiono krótko funkcje oraz podstawowe możliwości programu związane z wizualizacją graficzną rozwiązań w zagadnieniach dwuwymiarowej optymalizacji matematycznej.

Każda z funkcji programu opisana w ramach skryptu została zilustrowana niezbędnym, stosunkowo prostym przykładem. W celu zapewnienia zwięzłości opisu w całym opracowaniu ograniczono szczegółową dyskusję – zwykle do zadań związanych z minimalizacją funkcji celu.

Rozwinięcie i uzupełnienie zaprezentowanego materiału Czytelnik znajdzie w bibliografii przytoczonej kolejno w tekście.

Szczególne podziękowania autor kieruje do Pana prof. dr. hab. inż. Czesława Szymczaka za cenne uwagi merytoryczne zawarte w recenzji skryptu oraz do Pani dr inż. Katarzyny Szepietowskiej, która zechciała być jego pierwszym czytelnikiem. Dzięki nim opracowanie niewątpliwie zyskało na jasności i przystępności.

Indeks

ConicOptimization, 44
ContourPlot, 63

DualLinearProgramming, 50

EulerEquation, 16

FindMaximum, 25
FindMinimum, 25
FindPostmanTour, 59
FindShortestPath, 56
FindShortestTour, 53
FirstIntegrals, 17

KnapsackSolve, 54

LinearFractionalOptimization, 40
LinearOptimization, 38
LinearProgramming, 47

Maximize, 33
Minimize, 33

NMaximize, 21
NMinimize, 21
NVariationalBound, 19

Plot3D, 65

QuadraticOptimization, 41

RegionFunction, 65
RegionPlot, 63

SecondOrderConeOptimization, 42
SemidefiniteOptimization, 43

VariationalBound, 18
VariationalD, 15

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 2,8, ark. druku 4,75, 1231/1122

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08