

Krzysztof Tesch

NUMERYCZNA MECHANIKA PŁYNÓW

Gdańsk 2021

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dariusz Mikielawicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Michał Szydłowski

RECENZENCI

Jacek Pozorski

Jan Szantyr

REDAKCJA JĘZYKOWA

Agnieszka Frankiewicz

PROJEKT OKŁADKI

Ireneusz Jelonek

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy.

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2021

ISBN 978-83-7348-833-5

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 10,8, ark. druku 13,5, 239/1133

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

SPIS TREŚCI

I Wstęp	1
1. Wiadomości wstępne	2
1.1. Opis płynu na różnych poziomach skal	2
1.1.1. Opis mikroskopowy	3
1.1.2. Opis mezoskopowy	3
1.1.3. Opis makroskopowy	6
1.2. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych	6
1.2.1. Klasyfikacja ze względu na charakter nieliniowości	6
1.2.2. Klasyfikacja ze względu na typ	7
1.2.3. Przykłady równań	8
1.3. Metody numeryczne w mechanice płynów	11
1.3.1. Metody	11
1.3.2. Cechy schematów dyskretyzacji równań	13
Bibliografia	15
2. Równania makroskopowe	16
2.1. Równania zachowania	16
2.1.1. Równanie zachowania masy	16
2.1.2. Równanie zachowania pędu	16
2.1.3. Równanie zachowania energii	17
2.2. Ogólne równanie transportu	18
2.3. Druga zasada termodynamiki	19
2.4. Równania konstytutywne	20
2.4.1. Mechaniczne równania konstytutywne	20
2.4.2. Równania stanu	21
2.4.3. Strumienie	22
2.5. Szczególne postaci podstawowych równań	22
2.5.1. Równanie Naviera–Stokesa	23
2.5.2. Równanie Fouriera–Kirchhoffa	24
2.5.3. Ogólne równanie transportu	24
2.6. Warunki zgodności i fizyczne warunki brzegowe	25
2.6.1. Warunki zgodności	25
2.6.2. Fizyczne warunki brzegowe	26
2.7. Przepływy wieloskładnikowe i wielofazowe	27
2.7.1. Przepływy wieloskładnikowe	27
2.7.2. Przepływy wielofazowe	27
Bibliografia	28

3. Przepływy turbulentne	29
3.1. Wstęp	29
3.2. DNS	31
3.3. URAS i RAS	31
3.3.1. Tensor naprężeń Reynoldsa	31
3.3.2. Wybrane modele turbulencji dla hipotezy Boussinesqa	33
3.3.3. Równania Fouriera–Kirchhoffa	35
3.4. LES	35
3.5. DES	38
Bibliografia	39
4. Modelowanie złożonych zjawisk przepływowych	41
4.1. Przepływy z powierzchnią międzyfazową	41
4.2. Topnienie i krzepnięcie	43
4.3. Kawitacja	46
4.4. Przepływy nienewtonowskie i bioprzepływy	48
Bibliografia	50
II Metody lagranżowskie	51
5. Dynamika molekularna	52
5.1. Równanie ruchu	52
5.2. Potencjały	53
5.2.1. Potencjał Lennarda–Jonesa	53
5.2.2. Potencjał grawitacyjny	54
5.3. Współrzędne bezwymiarowe	54
5.4. Metody całkowania równania ruchu	55
5.4.1. Algorytm Eulera	55
5.4.2. Podstawowy algorytm Störmera–Verleta	56
5.4.3. Algorytm <i>leapfrog</i>	57
5.4.4. Prędkościowy algorytm Störmera–Verleta	58
5.4.5. Inne algorytmy	59
5.5. Warunki początkowe i brzegowe	60
5.5.1. Położenia początkowe	60
5.5.2. Prędkości początkowe	60
5.5.3. Warunki brzegowe	61
Bibliografia	61
6. Dynamika cząstek dyssypatywnych	62
6.1. Równanie ruchu	62
6.2. Określenie sił	63
6.3. Współrzędne bezwymiarowe	64
6.4. Całkowanie równania ruchu	64
Bibliografia	66

7. Hydrodynamika wygładzonych cząstek	67
7.1. Całkowa reprezentacja funkcji i jądro aproksymacji	67
7.2. Aproksymacja funkcji i operatorów różniczkowych	69
7.2.1. Funkcja	69
7.2.2. Gradient	69
7.2.3. Dywergencja	71
7.2.4. Laplasjan	71
7.3. Postaci podstawowych równań	72
7.3.1. Równanie zachowania masy	72
7.3.2. Równanie zachowania pędu	73
7.3.3. Równanie stanu	74
7.4. Jądro aproksymacji	75
7.4.1. Uwagi ogólne	75
7.4.2. Wybrane postaci jądra aproksymacji	76
7.4.3. Długość wygładzania	78
7.5. Warunki brzegowe	80
7.6. Algorytm	80
7.6.1. Zbiór sąsiadów cząstki	80
7.6.2. Dyskretyzacja równania ruchu	81
7.6.3. Dobór kroku całkowania	82
7.6.4. Inicjalizacja	82
7.6.5. Pseudokod	83
Bibliografia	84
8. Metoda siatkowa Boltzmannna	85
8.1. Podstawy kinetycznej teorii gazów	85
8.1.1. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa	85
8.1.2. Ciągłe równanie Boltzmannna	86
8.1.3. Operator zderzeń	87
8.1.4. Twierdzenie H Boltzmannna	88
8.1.5. Rozkład Maxwella–Boltzmannna	88
8.2. Równania zachowania a równanie Boltzmannna	89
8.2.1. Uśrednianie	89
8.2.2. Równania zachowania	90
8.2.3. Równanie stanu	92
8.3. Dyskretyzacja przestrzeni fazowej	93
8.3.1. Dyskretne równanie Boltzmannna	93
8.3.2. Kwadratury	93
8.4. Dyskretyzacja przestrzeni	96
8.5. Siatkowe równanie Boltzmannna	96
8.5.1. Siatka D1Q3	97
8.5.2. Siatka D2Q9	98
8.5.3. Siatki trójwymiarowe	98
8.5.4. Tensory siatkowe	99
8.6. Dyskretyzacja rozkładu Maxwella–Boltzmannna	100
8.6.1. Przybliżenie dla małych liczb Macha	100
8.6.2. Dyskretyzacja	101
8.7. Rozwinięcie Chapmana–Enskoga	101
8.8. Opis metody	106
8.8.1. Algorytm	106

8.8.2. Warunki brzegowe i początkowe	108
Bibliografia	109

III Metody eulerowskie 111

9. Metoda różnic skończonych	112
9.1. Schematy różnicowe	112
9.1.1. Wzór Taylora	112
9.1.2. Różnicowe odpowiedniki pochodnych	113
9.2. Ogólne równanie transportu	115
9.2.1. Równanie konwekcji	116
9.2.2. Równanie dyfuzji	121
9.2.3. Równanie konwekcji–dyfuzji	126
9.3. Stabilność schematów dyskretyzacji	128
9.3.1. Schemat FTCS	129
9.3.2. Schemat FOU	131
9.3.3. Schemat niejawny BTCS	132
9.3.4. Schemat typu Cranka–Nicolson	134
9.3.5. Schemat typu Laxa–Wendroffa	135
9.3.6. Schemat typu Laxa–Friedrichsa	136
9.4. Zgodność i zbieżność schematów dyskretyzacji	137
9.4.1. Równanie zmodyfikowane	137
9.4.2. Twierdzenie Laxa	138
9.4.3. Zmodyfikowane równanie konwekcji	138
9.5. Dyfuzja i dyspersja numeryczna	140
9.5.1. Równania modelowe	140
9.5.2. Równanie konwekcji	141
9.5.3. Przykłady	144
9.6. Równanie Naviera–Stokesa	145
9.6.1. Metoda oparta na sformułowaniu wirowość–funkcja prądu	147
9.6.2. Metoda sztucznej ścisłości	148
9.6.3. Metoda projekcji	149
9.6.4. Metoda dekompozycji operatorów	152
9.6.5. Metoda ułamkowego kroku	154
Bibliografia	155
10. Metoda objętości skończonych	157
10.1. Ogólne równanie transportu	157
10.1.1. Dyskretyzacja przestrzenna	157
10.1.2. Dyskretyzacja czasowa	179
10.1.3. Układ równań liniowych	182
10.1.4. Warunki brzegowe	184
10.2. Równanie Naviera–Stokesa	187
10.2.1. Dyskretyzacja równania	187
10.2.2. Algorytm PISO	191
10.2.3. Algorytm SIMPLE	193
10.2.4. Algorytm PIMPLE	195
10.3. Wybrane równania turbulencji	196
10.3.1. Model $k\text{-}\varepsilon$	196

10.3.2. Model $k-\omega$	200
10.4. Dyskretyzacja obszaru obliczeniowego	202
10.4.1. Typowe objętości skończone	202
10.4.2. Typy siatek	203
10.4.3. Jakość siatek	205
Bibliografia	207