

MATEMATYKA

MATEMATYKA

Podstawy
z elementami matematyki wyższej

pod redakcją Barbary Wikiel

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2019

Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej
Dariusz Mikielawicz

Zespół redakcyjny
Danuta Beger, Jolanta Dymkowska, Barbara Wikieł

Recenzent
Andrzej Nowik

Redakcja językowa
Hanna Kościelecka

Projekt okładki
Ewa Niziołkiewicz

Przygotowanie do druku
Roman Beger

Autorzy
Miroslaw Bednarczyk, Danuta Beger, Anita Dąbrowicz-Tłalka
Jolanta Dymkowska, Wojciech Grązewicz, Katarzyna Kujawska
Krystyna Nowicka, Gerard Paszek, Irena Skoblik-Paszek, Małgorzata Suchecka
Barbara Wikieł, Remigiusz Wojciechowski, Dorota Żarek

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór w całości lub we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany
w jakiegokolwiek formie i w jakikolwiek sposób bez pisemnej zgody wydawcy

© Copyright by Politechnika Gdańska, Centrum Nauczania Matematyki
i Kształcenia na Odległość, Gdańsk 2019

ISBN 978-83-7348-601-0

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dodruk XI wyd. Ark. wyd. 11,6, ark. druku 17,75, 1211/1085

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

Spis treści

Przedmowa	9
1. Funkcje elementarne	11
1.1. Liczby rzeczywiste	11
Zbiory liczbowe	11
Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej	12
Rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną	14
Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb	16
Wzór dwumianowy Newtona	19
Zadania do samodzielnego rozwiązania	21
1.2. Funkcje i ich własności	25
Zadania do samodzielnego rozwiązania	37
1.3. Wielomiany	39
Określenie wielomianu	39
Trójmian kwadratowy	40
Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych	44
Działania na wielomianach	46
Rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych	49
Zadania do samodzielnego rozwiązania	51
1.4. Funkcje wymierne	55
Rozwiązywanie równań i nierówności z wyrażeniami wymiernymi	56
Zadania do samodzielnego rozwiązania	58
1.5. Funkcje potęgowe	59
Rozwiązywanie równań i nierówności pierwiastkowych	61
Zadania do samodzielnego rozwiązania	66
1.6. Funkcje wykładnicze	67
Rozwiązywanie równań i nierówności wykładniczych	68
Zadania do samodzielnego rozwiązania	69
1.7. Funkcje logarytmiczne	71
Rozwiązywanie równań i nierówności logarytmicznych	74
Zadania do samodzielnego rozwiązania	77
1.8. Funkcje trygonometryczne	79

Związki między bokami i kątami w trójkącie prostokątnym	79
Miara łukowa kąta	82
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	83
Tożsamości i wzory trygonometryczne	85
Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej	87
Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych	89
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	93
Zadania do samodzielnego rozwiązania	95
1.9. Funkcje cyklometryczne	99
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	104
Zadania do samodzielnego rozwiązania	105
1.10. Przykłady różne – łatwe i trudne	106
1.11. Zadania różne – łatwe i trudne	113
2. Geometria analityczna	119
2.1. Wektory i działania na wektorach	119
Wektory w układzie współrzędnych	121
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	123
Zadania do samodzielnego rozwiązania	126
2.2. Prosta na płaszczyźnie	127
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	128
Zadania do samodzielnego rozwiązania	129
2.3. Układy równań liniowych	131
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	132
Zadania do samodzielnego rozwiązania	134
2.4. Okrąg, elipsa, parabola, hiperbola	136
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	138
Zadania do samodzielnego rozwiązania	142
3. Ciągi liczbowe	145
3.1. Monotoniczność i ograniczoność ciągu	145
Monotoniczność ciągu	145
Ograniczoność ciągu	146
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	147
Zadania do samodzielnego rozwiązania	149
3.2. Ciąg arytmetyczny i geometryczny	150
Ciąg arytmetyczny	150
Ciąg geometryczny	150
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	151
Zadania do samodzielnego rozwiązania	156
3.3. Ciąg określony rekurencyjnie	156
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	156
Zadania do samodzielnego rozwiązania	158
3.4. Granica ciągu	159

Przykładowe zadania z rozwiązaniami	164
Zadania do samodzielnego rozwiązania	177
3.5. Zadania różne – łatwe i trudne	180
4. Granica i ciągłość funkcji	183
4.1. Granica funkcji w punkcie	183
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	186
Zadania do samodzielnego rozwiązania	187
4.2. Granice funkcji w nieskończoności	189
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	189
Zadania do samodzielnego rozwiązania	193
4.3. Granice jednostronne funkcji	194
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	195
Zadania do samodzielnego rozwiązania	197
4.4. Ciągłość funkcji	199
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	201
Zadania do samodzielnego rozwiązania	204
4.5. Zadania różne – łatwe i trudne	205
5. Badanie funkcji	209
5.1. Pochodna funkcji	209
Pojęcie pochodnej	209
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	211
Zadania do samodzielnego rozwiązania	212
Wyznaczanie pochodnej	213
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	214
Pojęcia związane z pochodną funkcji	217
Pochodne wyższych rzędów	218
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	219
Zadania do samodzielnego rozwiązania	220
5.2. Zastosowanie pochodnych do badania funkcji	222
Obliczanie granicy funkcji	222
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	223
Asymptoty wykresu funkcji	225
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	226
Zadania do samodzielnego rozwiązania	229
Monotoniczność i ekstrema lokalne funkcji	230
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	234
Zadania do samodzielnego rozwiązania	239
Wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia wykresu funkcji	241
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	243
Zadania do samodzielnego rozwiązania	244
Badanie przebiegu zmienności funkcji i szkicowanie wykresu	245
Przykładowe zadania z rozwiązaniami	246

Zadania do samodzielnego rozwiązania	251
5.3. Zadania różne – łatwe i trudne	251
Odpowiedzi do zadań	254
Bibliografia	283

Przedmowa

Publikacja niniejsza jest skierowana do tych, którzy chcą się nauczyć matematyki. Skoro czytać uczymy się czytając, pisać – pisząc, to liczyć można się nauczyć tylko przez liczenie. Potrzeba do tego przede wszystkim chęci, nieco wyobraźni i wiary we własne możliwości. Warto zdobyć się na ten wysiłek, by potwierdzić słowa Jonathana Swifta, autora *Podróży Guliwera*: „Człowiek nie jest zwierzęciem rozumnym, jest tylko zdolny do rozumowania”.

Książka ta ma stanowić pomoc dla tych wszystkich, którzy chcą pogłębić swoje umiejętności rozwiązywania zadań z matematyki w zakresie częściowo powtórkowym w stosunku do programu szkoły ponadgimnazjalnej, a częściowo poza ten program wykraczającym. Powstała ona z myślą o uczniach szkół ponadgimnazjalnych przygotowujących się do podjęcia studiów na kierunkach wymagających znajomości matematyki, a także z myślą o studentach pierwszego roku studiów oraz o tych wszystkich, których matematyka po prostu interesuje.

Autorzy podręcznika chcieli, by był on użyteczny zarówno dla tych, którzy chcą przypomnieć sobie podstawy teoretyczne różnych zagadnień bądź też na przykładach prześledzić metody rozwiązywania zadań, jak i dla tych, którzy chcą samodzielnie je rozwiązywać, sprawdzając tylko poprawność odpowiedzi. Podręcznik ten należałoby polecić przede wszystkim studentom pierwszego roku. Sprawdzenie i uzupełnienie przedstawionego w nim materiału ułatwi im w znacznej mierze zrozumienie treści wykładów i na pewno umożliwi uzyskanie lepszych ocen.

Przygotowując ten podręcznik, autorzy korzystali przede wszystkim z własnych notatek dotyczących wykładów i ćwiczeń prowadzonych przez siebie od wielu lat. Większość przytoczonych w nim zadań sami wymyślili, część podpowiedzieli im koledzy z uczelni, a niektóre zaczerpnęli ze znanych powszechnie zbiorów zadań i podręczników, przeznaczonych zarówno dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych, jak i dla studentów. Źródła, z których pochodzą zadania, są więc tak różnorodne, że nie podano ich w tekście. W zamian natomiast przygotowano obszerną bibliografię, umieszczoną na końcu książki.

Z myślą o studentach i kandydatach na studia autorzy przygotowali również kurs na platformie moodle pod adresem <http://e-learning.cnm.pg.gda.pl>, gdzie oprócz adresów do korespondencji skorzystać można z e-konsultacji z autorami podręcznika oraz z wielu dodatkowych materiałów.

Niniejsze wydanie różni się od poprzednich drobnymi zmianami i uzupełnieniami. Autorzy składają serdeczne podziękowanie Koleżankom i Kolegom z Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość Politechniki Gdańskiej oraz studentom za cenne uwagi i wskazówki, które zostały uwzględnione w tym wydaniu podręcznika.

Barbara Wikieł